

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

Тема: Упрощение формул логики с помощью равносильных преобразований

Цель: формирование у студентов умений, используя основные равносильности и тавтологии, упрощать формулы логики, научиться сравнивать и определять тождественность логических функций.

Основные равносильности алгебры высказываний

В математической логике, так же как и в алгебре, операции подчиняются определённым законам. С помощью этих законов можно упрощать составные высказывания.

Рассмотрим их для операций дизъюнкции и конъюнкции, учитывая свойство двойственности.

Законы	Дизъюнкция	Конъюнкция
Переместительный закон	$a \vee b = b \vee a$	$a \wedge b = b \wedge a$
Сочетательный закон	$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$	$a(bc) = (ab)c$
Распределительный закон	$a(b \vee c) = ab \vee ac$	$a \vee (bc) = (a \vee b)(a \vee c)$
Правила идемпотентности	$a \vee a = a$	$a \wedge a = a$
Законы Де Моргана	$\overline{a \vee b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}$
Правила операций с константами	$a \vee 0 = a$ $a \vee 1 = a$	$a \wedge 0 = 0$ $a \wedge 1 = a$
Законы поглощения	$a \vee ab = a$ $a \vee (\bar{a}b) = a \vee b$	$a(a \vee b) = a$ $a(\bar{a} \vee b) = ab$
Законы инверсии	$a \vee \bar{a} = 1$	$a \wedge \bar{a} = 0$
Законы склеивания	$ab \vee a\bar{b} = a$	$(a \vee b) \cdot (a \vee \bar{b}) = a$
Снятие импликации	$a \rightarrow b = \bar{a} \vee b$	
Снятие эквиваленции	$a \leftrightarrow b = a \cdot b \vee \bar{a} \cdot \bar{b}$	
Снятие строгой дизъюнкции	$a \oplus b = \bar{a} \cdot b \vee a \cdot \bar{b}$	

Пример 1:

Доказать $((X \rightarrow Y)X) \rightarrow Y = 1$

1 способ (аналитический) – с помощью применения формул и упрощения:

$$((X \rightarrow Y)X) \rightarrow Y = ((\bar{X} \vee Y) \cdot X) \rightarrow Y = (Y \cdot X) \rightarrow Y = \overline{X \cdot Y} \vee Y = \bar{X} \vee \bar{Y} \vee Y = \bar{X} \vee 1 = 1$$

2 способ (семантический) – составление таблицы истинности:

X	Y	X→Y	(X→Y)X	((X→Y)X)→Y
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Пример 2. С помощью равносильных преобразований упростите высказывание
 $((A \wedge (\neg C)) \rightarrow (B \vee D)) \vee ((A \rightarrow (D \vee C)) \rightarrow (\neg B))$

Решение.

$$\begin{aligned} & ((A \wedge (\neg C)) \rightarrow (B \vee D)) \vee ((A \rightarrow (D \vee C)) \rightarrow (\neg B)) \equiv \neg((A \wedge (\neg C)) \vee (B \vee D)) \vee \\ & \vee ((\neg A \vee (D \vee C)) \rightarrow (\neg B)) \equiv ((\neg A \vee C) \vee (B \vee D)) \vee (\neg(\neg A \vee (D \vee C))) \vee (\neg B) \equiv \\ & \equiv (\neg A \vee C \vee B \vee D) \vee (A \wedge (\neg(D \vee C))) \vee (\neg B) \equiv (\neg A \vee C \vee B \vee D) \vee (A \wedge (\neg D \wedge \\ & \wedge (\neg C))) \vee (\neg B) \equiv (\neg A \vee C \vee B \vee D) \vee (A \wedge (\neg D) \wedge (\neg C)) \vee (\neg B) \equiv \\ & \equiv (\neg A \vee C \vee B \vee D) \vee (A \wedge (\neg D) \wedge (\neg C)) \vee (\neg B) \end{aligned}$$

Пример 3. Равносильными преобразованиями приведите формулу
 $F(X, Y, Z) = X \wedge (\neg(Y \wedge Z)) \vee X \vee Y$ к ДНФ.

Решение.

1) $X \wedge (\neg(Y \wedge Z)) \vee X \vee Y \equiv X \wedge (\neg Y \vee (\neg Z)) \vee X \vee Y$ - ПНФ

2) $X \wedge (\neg Y \vee (\neg Z)) \vee X \vee Y \equiv (X \wedge (\neg Y)) \vee (X \wedge (\neg Z)) \vee X \vee Y$ - ДНФ

Задание:

Выполните задание согласно варианту.

1 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$A(x, y, z) \equiv \bar{x} \vee ((\bar{y} \vee z) \rightarrow z\bar{y})$$

$$B(x, y, z) \equiv (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge \overline{x \wedge y \wedge z}$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$G \equiv (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge \overline{(a \rightarrow b)}$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$(\overline{X \wedge Z} \rightarrow Y \wedge Z) \rightarrow (Y \rightarrow Z)$$

2 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \bar{x} \bar{z} \vee xy \vee x\bar{z} \quad B = z \rightarrow xy$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$\overline{x \wedge y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$\left((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \bar{Y}) \right) \rightarrow \bar{X}$$

3 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z) \quad B = y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \wedge y \leftrightarrow y \wedge x$;

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$(X \rightarrow \bar{Y}) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow \bar{X})$$

4 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z) \quad B = y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$x \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$\overline{Y} \rightarrow ((\overline{Y} \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow Y));$$

5 вариант

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow z) \quad B = (x \rightarrow y) \vee z$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \wedge x \leftrightarrow x$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$(Y \leftrightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow (X \wedge Y));$$

6 вариант

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{x} \overline{z} \vee xy \vee x\overline{z} \quad B = z \rightarrow xy$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \overline{x} \vee \overline{y}$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$((X \wedge \overline{Y}) \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y);$$

7 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow z) \quad (x \rightarrow y) \vee z$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$x \wedge (x \vee y) \leftrightarrow x$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$(Y \leftrightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow (X \wedge Y));$$

8 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{x} \overline{z} \vee xy \vee x\overline{z} \quad B = z \rightarrow xy$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$x \vee y \leftrightarrow y \vee x$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$(X \rightarrow \overline{Y}) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow \overline{X});$$

9 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow z) \quad B = y \rightarrow (x \rightarrow z)$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$x \vee (y \vee z) \leftrightarrow (x \vee y) \vee z.$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$\overline{Y} \rightarrow ((\overline{Y} \rightarrow X) \wedge (X \rightarrow Y));$$

10 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \rightarrow z) \vee (x \rightarrow z) \quad B = (x \rightarrow y) \vee z$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$x \vee (y \wedge z) \leftrightarrow (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$((X \rightarrow Y) \wedge (X \rightarrow \bar{Y})) \rightarrow \bar{X};$$

Контрольные вопросы:

1. Что такое формула?
2. Какие две формулы называются равносильными?
4. Что такое тавтология?
5. Какая формула называется противоречием?