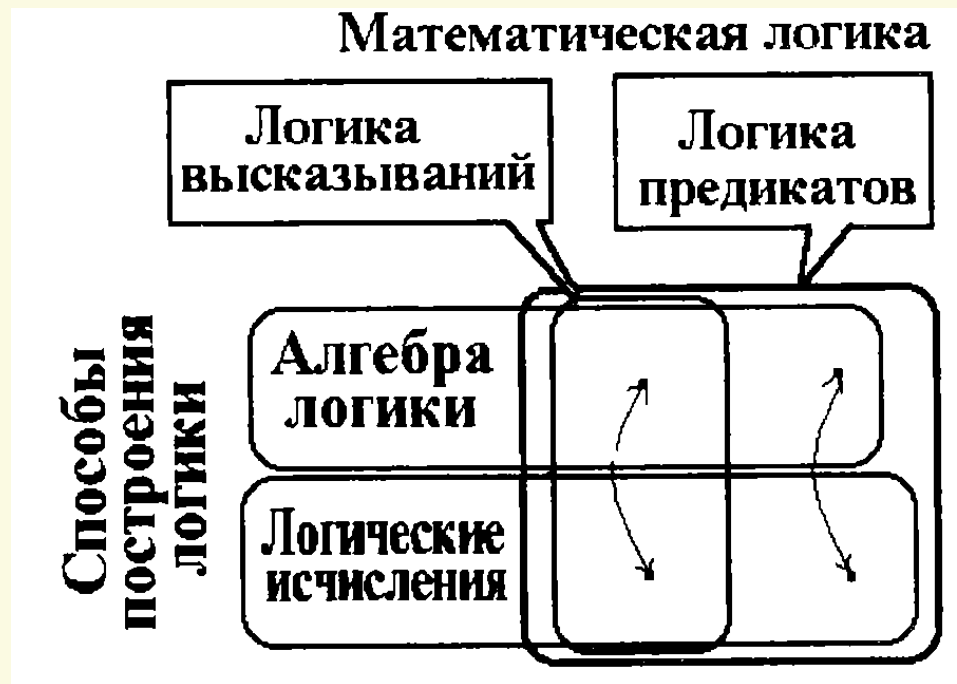


ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

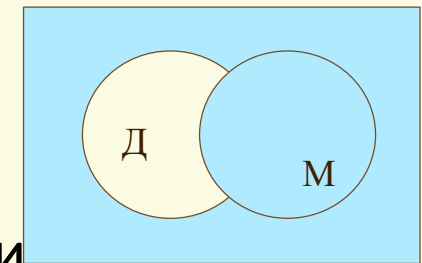
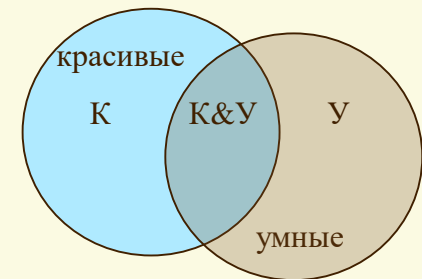
Состав математической логики



Высказывания

Из данных предложений выберите те, которые являются высказываниями:

- 1) Здравствуй!
- 2) Заяц белый или серый .
- 3) Этот человек умный и красивый.
- 4) Какая температура на улице?
- 5) Если идёт дождь, то крыши мокрые .
- 6) Уходя гасите свет.
- 7) Бразилия – страна Северной Америки.
- 8) Число x не меньше единицы.



Пример.

Предикат

"Икс любит кашу"

Если вместо неизвестного Икс подставить, например Маша, либо Даша, либо Саша, то получится:

- «Маша любит кашу»
 - «Даша любит кашу»
 - «Саша любит кашу»
- } высказывания

Предикат— это предложение с одной или несколькими переменными, которое обращается в высказывание при подстановке в него конкретных значений переменных.

Примеры предикатов

$P(x)$ = «Икс любит кашу» – одноместный предикат.

$M = \{ \text{Маша, Даша, Саша} \}$

Предметная область

Предметные переменные

Пусть значения истинности высказываний следующие:

«Маша любит кашу» - И

«Даша любит кашу» - Л

«Саша любит кашу» - И

x	P(x)
Маша	И
Даша	Л
Саша	И

Тогда $P(\text{Маша}) = \text{И}$, $P(\text{Даша}) = \text{Л}$, $P(\text{Саша}) = \text{И}$.

$I_p = \{ \text{Маша, Саша} \}$ - область истинности предиката $P(x)$.

Одноместный предикат

Определение 1. Одноместным предикатом $P(x)$ называется всякая функция одного переменного, аргумент x которой определен на некотором множестве M , а функция при этом принимает одно из двух значений: истина (1) или ложь (0).

Множество M , на котором задан предикат, называется областью определения (или предметной областью) предиката.

Множество I_p , на котором предикат принимает истинные значения, называется областью истинности предиката $P(x)$.

Примеры одноместных предикатов

$P_1(x)$ = « x – простое число» - одноместный предикат.

Пусть M_{P_1} - натуральные числа от 2 до 20.

Тогда, например, $P(2)=1$, $P(4)=0$

$I_{P_1} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

область истинности
предиката $P_1(x)$

$P_2(x)$ = « x – четное число»,

$P_3(x)$ = « x – больше 10»

M_{P_2} – целые числа от -10 до 10. Тогда $I_{P_2} = ?$

Двухместный предикат

Пусть предметное множество M - млекопитающие. Рассмотрим предикат

$P(x)$: «у x четыре ноги».

Тогда $P(\text{слон}) = 1$, $P(\text{кошка}) = 1$, $P(\text{человек}) = 0$.

- одноместный

Пусть N - множество натуральных чисел. Рассмотрим предикат

$G(x,y)$: « $x < y$ ».

Тогда, например, $G(1,3) = 1$, $G(8,5) = 0$.

двухместный

Он определен на множестве $M = N \times N$ (пары натуральных чисел)

Двухместный предикат

Пусть предметные множества $L = \{\text{Маша, Саша}\}$ – люди,

$V = \{\text{каша, борщ, солянка}\}$

Рассмотрим предикат K : « l любит кушать b »

двухместный

Он определен на множестве

$M = L \times V = \{(\text{Маша, каша}), (\text{Маша, солянка}), (\text{Маша, борщ}), (\text{Саша, каша}), (\text{Саша, солянка}), (\text{Саша, борщ})\}$

Если, например, Маша любит

солянку и кашу, то

$K(\text{Маша, солянка})=1,$

$K(\text{Маша, каша})=1,$

$K(\text{Маша, борщ})=0,$

L	V	$K(l,b)$
Маша	каша	1
Маша	борщ	0
Маша	солянка	1
Саша	каша	0
Саша	борщ	1
Саша	солянка	0

Двухместный предикат

Определение 2. Двухместным предикатом $P(x,y)$ называется функция двух переменных x и y , определённая на множестве $M=M_1 \times M_2$ и принимающая значения из множества $\{1,0\}$.

Пример. Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если $M = \mathbb{R}$ для одноместных предикатов и $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ для двухместных предикатов:

1. $x + 5 = 1$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = \{-4\}$;

2. при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$ ложное высказывание

3. $x^2 - 2x + 1 = 0$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = \{1\}$;

4. существует такое число x , что $x^3 - 2x + 1 = 0$ истинное высказывание

5. $x + 2 < 3x - 4$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = (3; +\infty)$;

6. однозначное неотрицательное число x кратно 3

7. $(x + 2) - (3x - 4)$ одноместный предикат $P(x)$, $I_P = \{0; 3; 6; 9\}$;

8. $x^2 + y^2 > 0$ предложение не является предикатом

двухместный предикат $Q(x, y)$, $I_Q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}$.

Виды предикатов

$$P(x,y): 2(x+y)=2y+2x$$

Выполняется для всех x и y –
тождественно-истинный

$$Q(x): x+1=x$$

Не выполняется ни для каких x –
тождественно-ложный

$$F(x,y): x+y=5$$

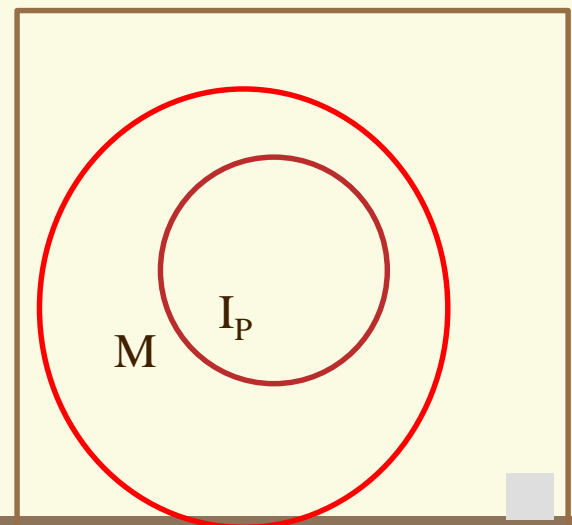
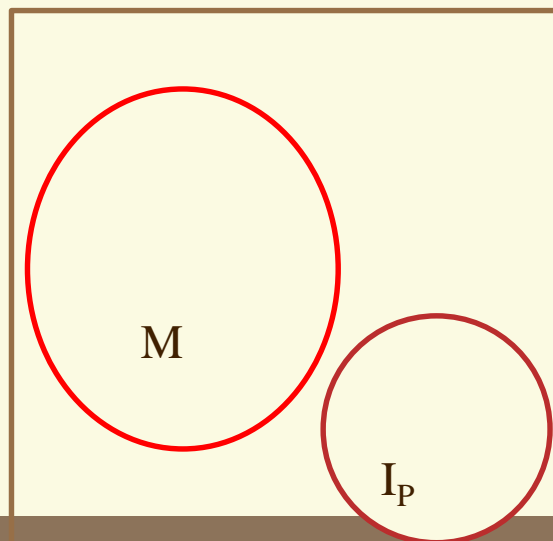
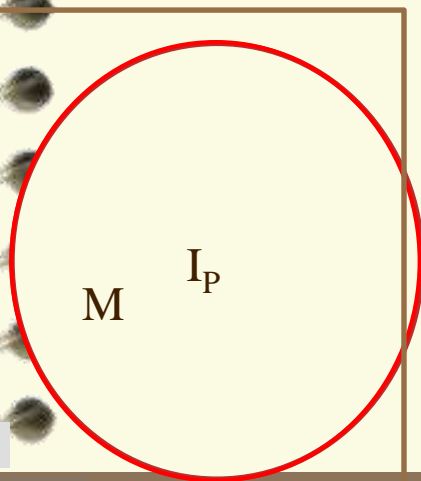
Выполняется для некоторых x и y –
выполнимый

Виды предикатов

Предикат называется тождественно истинным, если на всех наборах своих переменных принимает значение 1 ($I_p = M$).

Предикат называется тождественно ложным если на всех наборах своих переменных принимает значение 0 ($I_p \neq M$).

Предикат называется выполнимым, если на некотором наборе своих переменных принимает значение 1 ($I_p \subset M$).



Виды предикатов

Примеры.

$P(x)$ - «В месяце x температура воздуха в Гуково не опускается ниже 0 уже 100 лет».

Если $M = \{\text{Июнь, июль, август}\}$, то $P(x)$ — **тождественно-истинный**
одноместный предикат.

Если $M = \{\text{декабрь, январь, февраль}\}$, то $P(x)$ —
тождественно-ложный
одноместный предикат.

Если $M = \{\text{январь, февраль, март, ... ноябрь, декабрь}\}$, то
 $P(x)$ — **выполнимый одноместный предикат.**

Задачи

1. Какие из следующих выражений являются предикатами:

а) « x делится на 5» ($x \in N$);

б) «Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек);

$I = \{ \text{Селенга, Верхняя Ангара, Баргузин, Туркестан,}$

в) « $x^2 + 2x + 4$ » ($x \in R$);

$\text{Снежная, Кичера, Тья, Голоустная,}$

г) « $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ » ($x, y \in R$);

$\text{Бугульдейка} \}$

д) « x есть брат y » (x, y пробегают множество всех людей);

е) « x и y лежат по разные стороны от z » (x, y пробегают множество всех точек, а z — всех прямых одной плоскости);

ж) « $\text{ctg } 45^\circ = 1$ »;

з) « x перпендикулярна y » (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);

и) « $x^2 + x - 6 = 0$ » ($x \in R$);

к) «Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$ ».

Укажите для предикатов их множества истинности

Задачи

2. Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей:

- а) « $3 + 4 = 7$ »;
- б) «Вера и Надежда — сестры»;
- в) «Сегодня — вторник»;
- г) «Город Саратов находится на берегу реки Волги»;
- д) « $\sin 30^\circ = 0,5$ »;
- е) «А. С. Пушкин — великий русский поэт»;
- ж) « $3^2 + 4^2 = 5^2$ »;
- з) «Река Индигирка впадает в озеро Байкал»;
- к) «Луна есть спутник Марса»;
- л) « $\text{tg}(\pi/4) = 1$ ».

Построив такой предикат, постарайтесь или точно указать его область истинности, или как-то ее обрисовать.



ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Логические операции над высказываниями

В естественном языке	В логике	Обозначение
неверно, что ...	отрицание	$\neg, \bar{}$
... и хотя но а однако ...	конъюнкция	$\&, \wedge$
... или ...	дизъюнкция	\vee
если ..., то ... из ... следует влечет необходимо ...	импликация	\rightarrow
... тогда и только тогда, когда равносильно необходимо и достаточно... ... в том и только в том случае ...	эквивалентность	$\leftrightarrow, \sim, \equiv$

Конъюнкция предикатов

Пример.

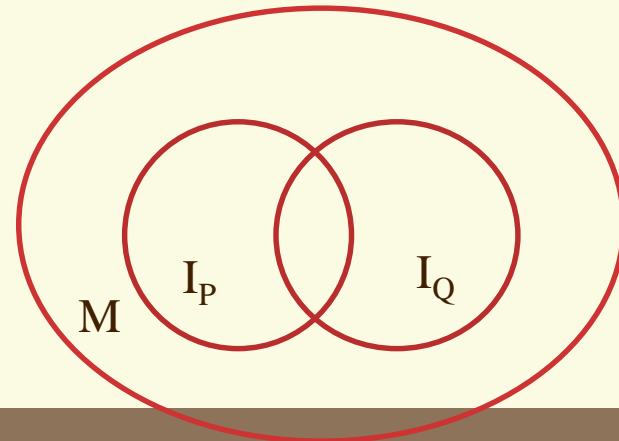
Пусть на некотором множестве M – натуральные числа определены предикаты $P(x)$ и $Q(x)$:

$P(x)$: “ x – четное число”

$Q(x)$: “ x кратно 3”

Тогда $P(x) \wedge Q(x)$:

“ x – четное число и x кратно трем” = “ x делится на 6”

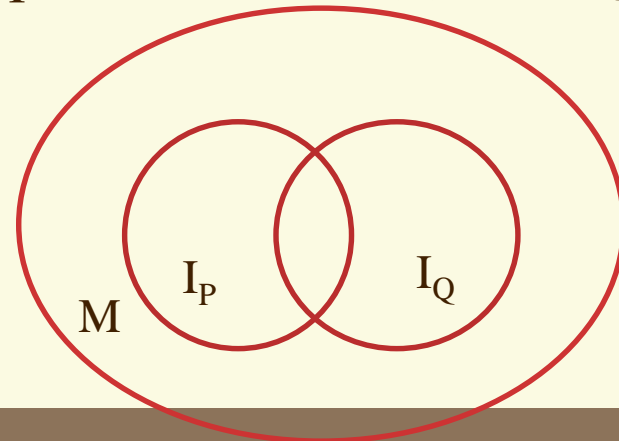


Конъюнкция предикатов

Пусть на некотором множестве M определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \& Q(x)$, который принимает значение «истина» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых **каждый** из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение «истина» и принимает значение «ложь» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \& Q(x)$ является общая часть областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, т.е. пересечение $I_{P \& Q} = I_P \cap I_Q$.



Дизъюнкция предикатов

Пример.

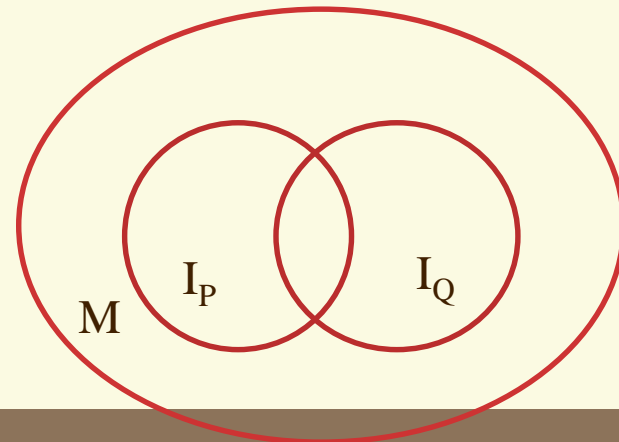
Пусть на некотором множестве M – натуральные числа определены предикаты $P(x)$ и $Q(x)$:

$P(x)$: “ x – четное число”

$Q(x)$: “ x кратно 3”

Тогда $P(x) \vee Q(x)$:

“ x – четное число или x кратно трем”

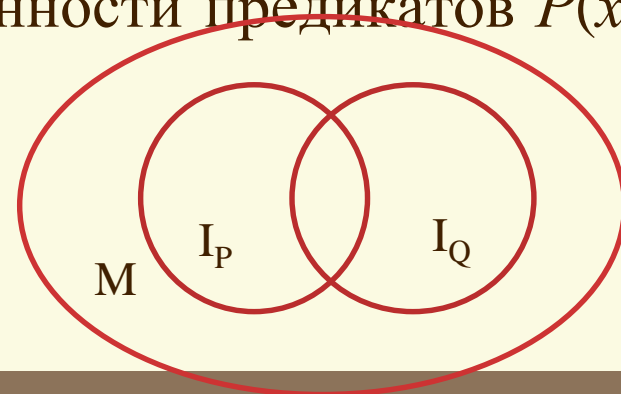


Дизъюнкция предикатов

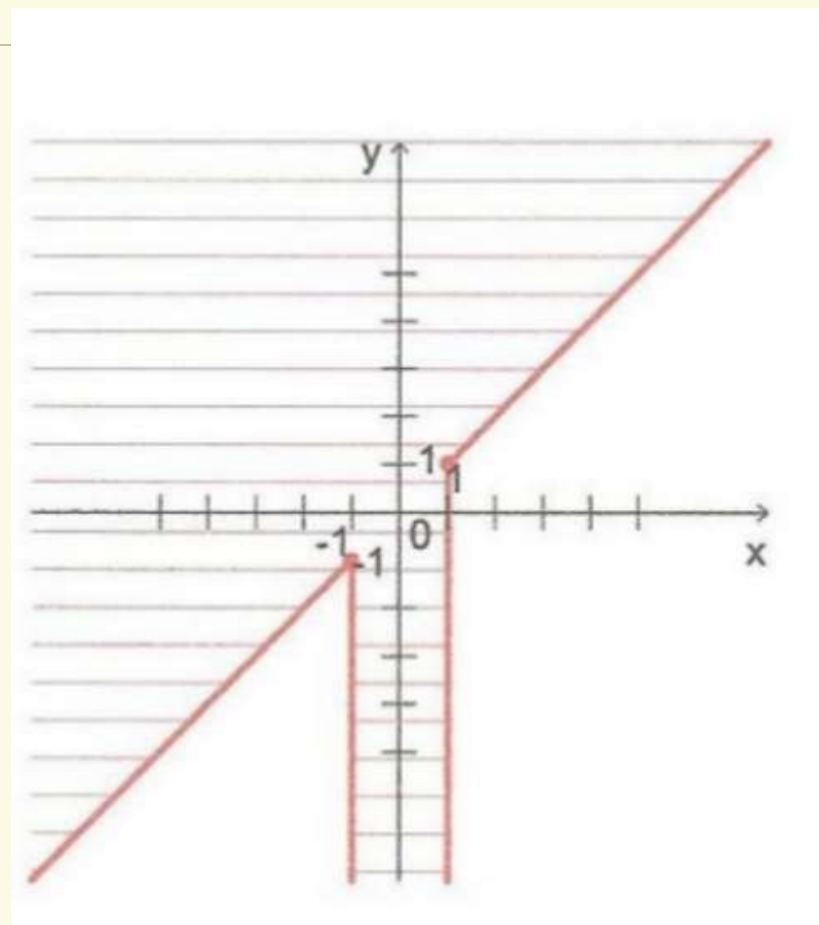
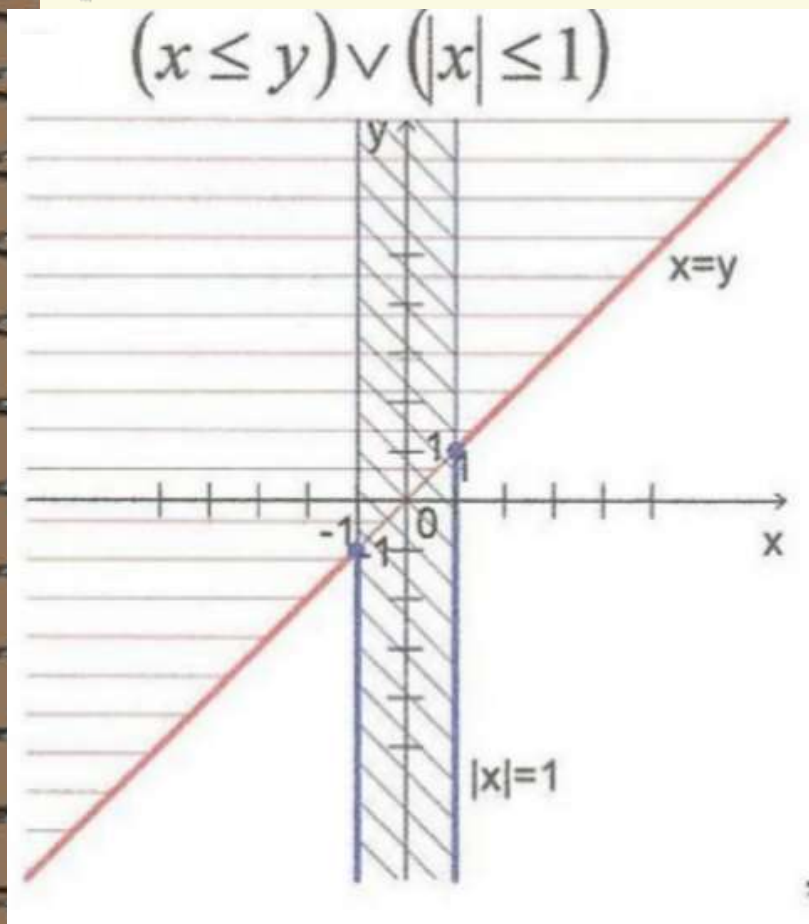
Пусть на некотором множестве M определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, который принимает значение «ложь» при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых **каждый** из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение «ложь» и принимает значение «истина» во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $P(x) \vee Q(x)$ является объединение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, т.е. $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q$.

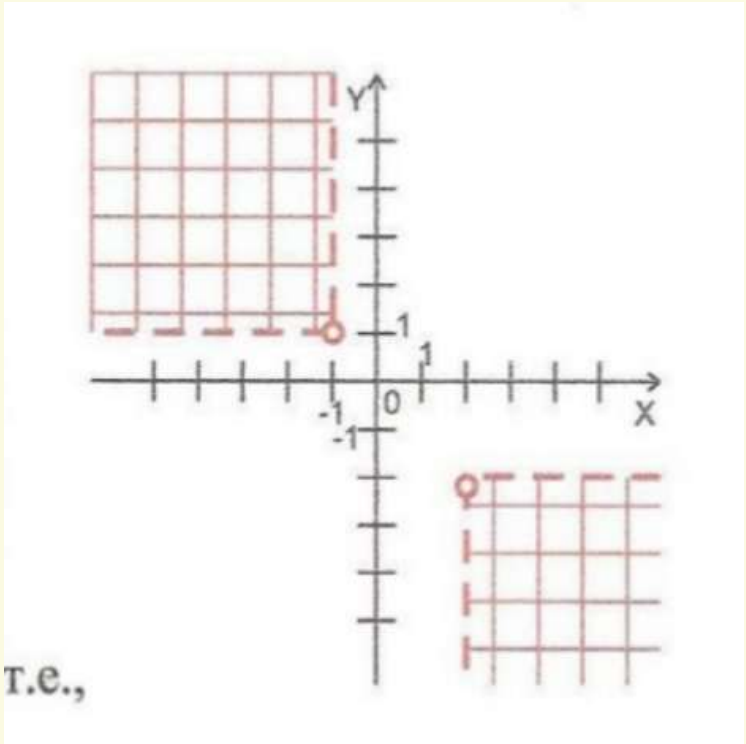
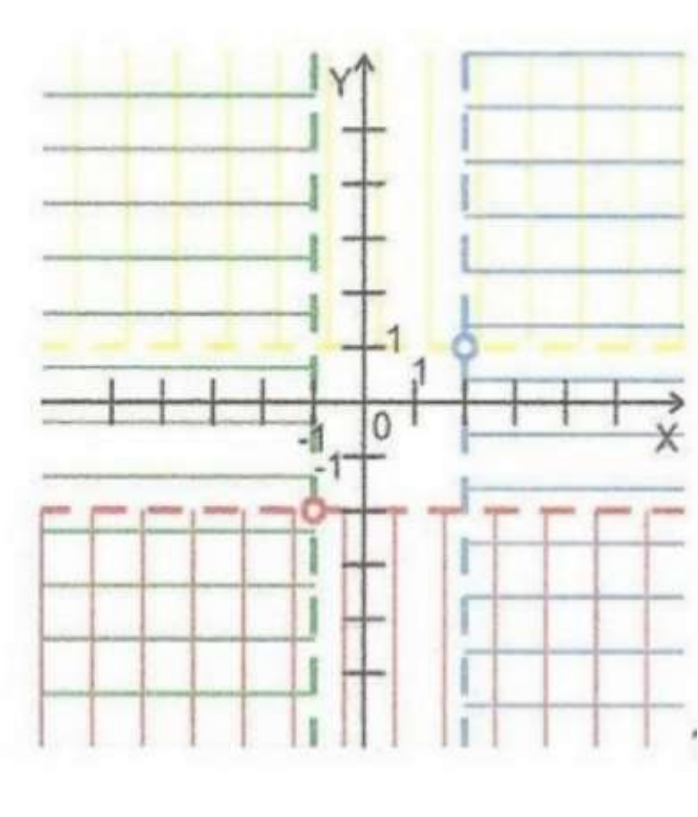


Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката



Изобразить на декартовой плоскости область истинности предиката

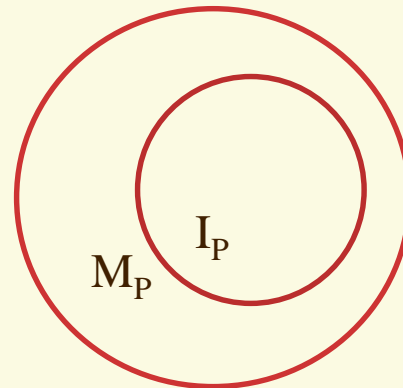
$$((x > 2) \vee (y > 1)) \wedge ((x < -1) \vee (y < -2))$$



Пример.

Пусть на некотором множестве M – натуральные числа
определен предикат $P(x)$: “ x – четное число”

Тогда $\neg P(x)$
: “ x – нечетное число”

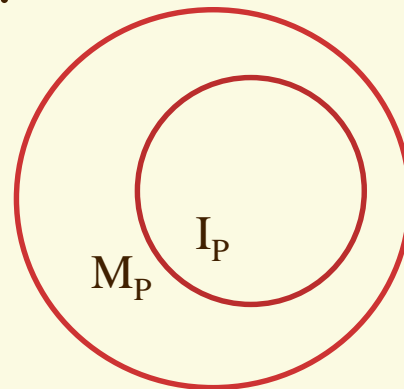


Отрицание предиката

Пусть на некотором множестве M определен предикат $P(x)$.

Определение. Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\bar{P}(x)$, который принимает значение «истина» при всех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «ложь», и принимает значение «ложь» при тех значениях $x \in M$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение «истина».

$$I_{\bar{P}} = M \setminus I_P = C I_P$$



Импликация предикатов

Пример.

Пусть на некотором множестве M – натуральные числа определены предикаты $P(x)$ и $Q(x)$:

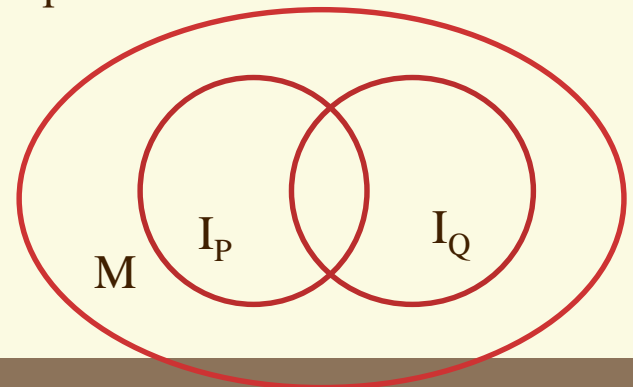
$P(x)$: “ x – четное число”

$Q(x)$: “ x кратно 3”

Тогда $P(x) \rightarrow Q(x)$:

“Если x – четное число, то x кратно трем”

$P(x) \rightarrow Q(x)$: “ x – нечетное число или x кратно трем”

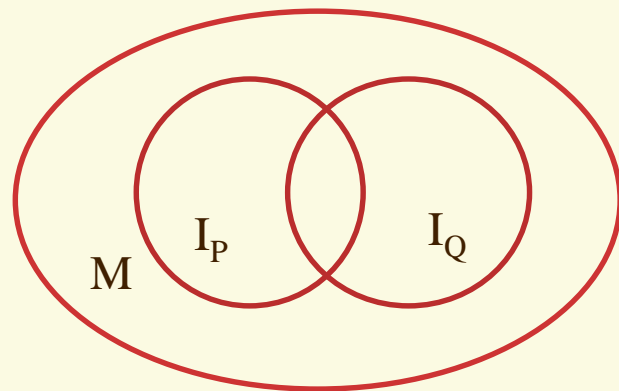


Эквиваленция предикатов

Пусть на некотором множестве M определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Определение. Эквиваленцией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $P(x) \equiv Q(x)$, который является истинным при тех и только тех значениях $x \in M$, при которых либо $P(x)$ и $Q(x)$ одновременно принимают значение «ложь», либо одновременно принимают значение «истина».

При выполнении логических операций над предикатами к ним применимы и равносильности алгебры логики.



Изобразите на координатной прямой или координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:

а) $(x > 2) \wedge (x < 2)$;

б) $(x > 2) \vee (x < 2)$;

в) $(x > 2) \equiv (x < 2)$;

г) $(x > 0) \wedge (y < 0)$;

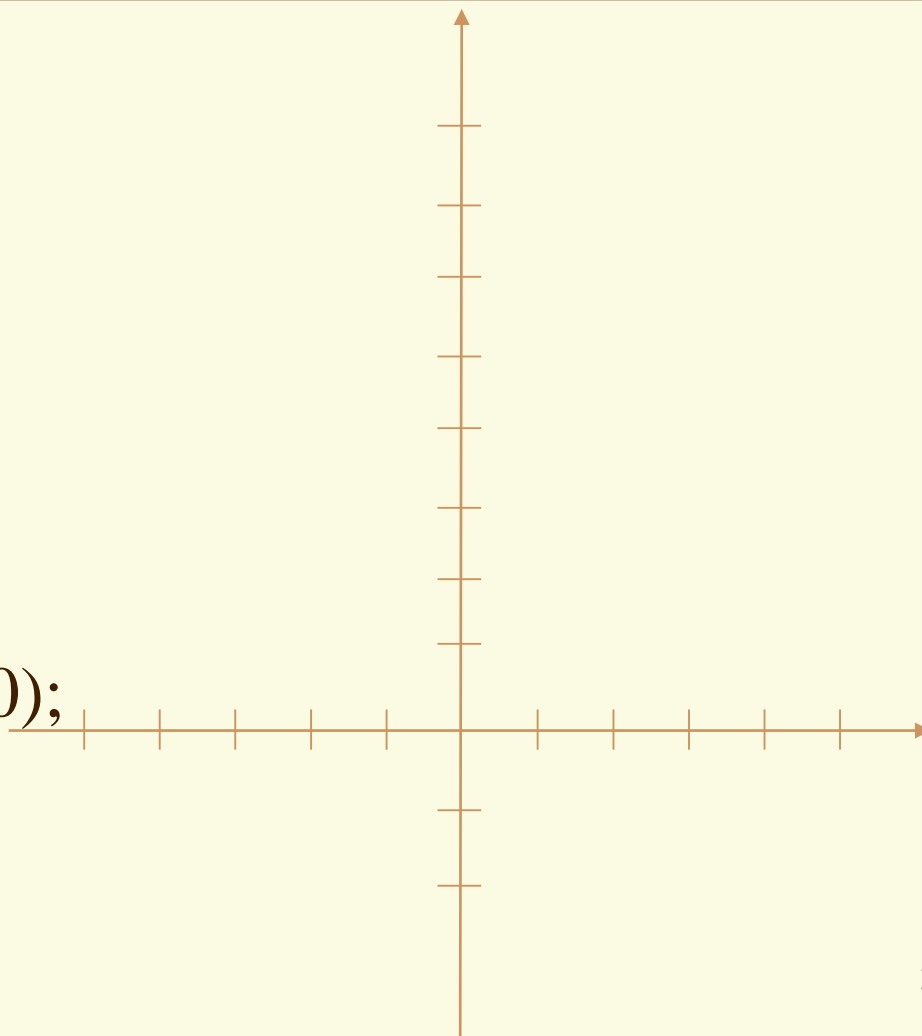
д) $(x > 0) \vee (y < 0)$;

е) $(x > 0) \rightarrow (y < 0)$;

ж) $(|x| < 3) \wedge (x \geq 2)$;

з) $(x^2 + y^2 > 1) \leftrightarrow (xy < 0)$;

л) $(x > 2) \rightarrow (x < 2)$;



Примеры предикатов, определенных на множестве натуральных чисел \mathbb{N}^2

1. Предикат тождества $E: \mathbb{N}^2 \rightarrow B$:

$E(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$.

2. Предикат порядка $Q: \mathbb{N}^2 \rightarrow B$:

$Q(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \leq a_2$.

3. Предикат делимости $D: \mathbb{N}^2 \rightarrow B$:

$D(a_1, a_2) = 1$ тогда и только тогда, когда a_1 делится на a_2 .

4. Предикат суммы $S: \mathbb{N}^3 \rightarrow B$:

$S(a_1, a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 + a_2 = a_3$.

5. Предикат произведения $\Pi: \mathbb{N}^3 \rightarrow B$:

$\Pi(a_1, a_2, a_3) = 1$ тогда и только тогда, когда $a_1 \cdot a_2 = a_3$.

Пример 3. Записать формулой логики предикатов предложение, отражающее транзитивное свойство делимости целых чисел.

“если a делится на b и b делится на c , то a делится на c ”,

“если $D(a, b)$ и $D(b, c)$, то $D(a, c)$ ” или
 $(D(a, b) \ \& \ D(b, c)) \rightarrow D(a, c).$

Пример 4. Дать словесные формулировки следующих составных высказываний (предложений):

$$1. S(a, b, c) \& D(a, d) \& D(b, d) \rightarrow D(c, d),$$

где S и D – предикаты суммы и делимости соответственно (см. пример 1);

$$2. \exists D(a, b) \& \exists S(a, b, c);$$

$$3. S(a, b, c) \sim S(b, a, c);$$

$$4. P_1 \sim P_2,$$

где P_1 – предикат “число $3n$ является четным”; P_2 – предикат “число n является четным”.

2. Записать предикатной формулой предложение, которое выражает для произвольных $a, b, c \in N$ в модели

$$N = (N; S, П, E),$$

называемой в логике предикатов *арифметикой натуральных чисел*, где N – множество натуральных чисел и $S, П, E$ – предикаты суммы, произведения, равенства соответственно, определенные в примере 1:

- а) коммутативность умножения;
- б) ассоциативность сложения;
- в) ассоциативность умножения;
- г) дистрибутивность слева умножения относительно сложения;
- д) дистрибутивность справа умножения относительно сложения;
- е) транзитивность равенства.

Следование и равносильность предикатов

Определение. Предикат Q следует из предиката P , заданного над теми же множествами, что и предикат Q ($P \Rightarrow Q$), если он обращается в истинное высказывание на всех тех наборах значений переменных из соответствующих множеств, на которых в истинное высказывание обращается предикат P , т.е. если $I_P \subseteq I_Q$

Пример. $P(x): x-3=0$; $Q(x): (x-2)(x-3)=0$.

$I_P = \{3\}$, $I_Q = \{2, 3\}$. $\Rightarrow I_P \subseteq I_Q \Rightarrow P \Rightarrow Q$

Следование и равносильность предикатов

Определение. Предикаты P и Q над одними и теми же множествами называют равносильными или эквивалентными ($P \Leftrightarrow Q$), если при любом наборе переменных из соответствующих множеств предикаты принимают одинаковое значение истинности, т.е. если $I_P = I_Q$.

$\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = 0$ и $x^2 - 5x + 6 = 0$ не являются равносильными.

$\frac{3x + 8}{x^2 + 1} = 0$ и $3x + 8 = 0$ являются равносильными.

Определите, являются ли равносильными предикаты, заданные на множестве действительных чисел \mathbb{R}

$$\sqrt{x+3} = x-1 \text{ и } x+3 = (x-1)^2$$

$$\frac{4-8x}{2+x} \geq 0 \text{ и } (4-8x)(2+x) \geq 0$$

$$\frac{4-8x}{2+x} > 0 \text{ и } (4-8x)(2+x) > 0$$

$$x^2 - x^4 \geq 0 \text{ и } 1 - x^2 \geq 0$$



КВАНТОРНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ПРЕДИКАТАМИ

Квантор общности

Определение. Операцией связывания квантором общности называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M , сопоставляется высказывание, обозначаемое $(\forall x)(P(x))$

(читается: «для всякого значения x $P(x)$ истинное высказывание» или «Для всех x имеет место $P(x)$ »), которое истинно в том и только в том случае, когда предикат $P(x)$ тождественно истинен, и ложно в противном случае.

Символ \forall происходит от первой буквы англ. all — «все». Сам символ $(\forall x)$ также называют квантором общности по переменной x .

Пример .

Пусть $P(x)$ – предикат “ x – четное число”.

Тогда $\forall x P(x)$ есть высказывание

«Всякое x – четное число» \equiv «Все числа – четные».

Квантор существования

Определение. Операцией связывания квантором существования называется правило, по которому каждому одноместному предикату $P(x)$, определенному на множестве M , ставится в соответствие высказывание, обозначаемое $(\exists x)(P(x))$

(читается: «Существует значение x , такое, что $P(x)$ истинное высказывание» или «Существует x , для которого имеет место $P(x)$ »), которое ложно в том и только в том случае, когда $P(x)$ тождественно ложен, и истинно в противном случае.

Символ \exists происходит от первой буквы англ. exist — «существовать». Сам символ $\exists x$ также называют квантором существования по переменной x .

Пример.

Пусть, $P(x)$ – предикат “ x – четное число”.

Тогда $\exists x P(x)$ есть высказывание

“Некоторые x – четные числа” \equiv “Существуют четные числа” .

«Выгул кошек и собак воспрещен»

$K(x)$: x -кошка

$C(x)$: x -собака

$B(x)$: для x выгул разрешен

$$\forall x ((K(x) \vee C(x)) \rightarrow \neg B(x))$$

$$\neg \exists x ((K(x) \vee C(x)) \wedge B(x))$$

Примеры

$P(x, y)$ - « x любит y » - двуместный предикат.

$\forall x \exists y$ - «для любого человека существует y – человек, которого он любит»

$\forall y \exists x$.

$\exists y \forall x$.

$\exists x \forall y$.

$\forall x \forall y$.

$\exists y \exists x$.

Примеры

Рассмотрим два одноместных предиката на множестве \mathbb{N} :

$P(x)$: « $1 \leq x$ » и $Q(x)$: « $x:30$ ».

$P(x)$: « $1 \leq x$ » - тождественно истинный.

$(\forall x)(1 \leq x)$ — «для всякого натурального x число 1 не превосходит x » - истинное высказывание.

$(\exists x)(1 \leq x)$ — «существует натуральное x , большее 1» - истинное высказывание.

$Q(x)$: « $x : 30$ » - опровержим.

$(\forall x)(x : 30)$ — «для любого x число x является делителем числа 30»

- ложное высказывание.

$(\exists x)(x : 30)$ —

«существует натуральное число x , которое является делителем числа 30»

- истинное высказывание.

Связанные и свободные переменные

Определение. Присоединение квантора с переменной к предикатной формуле называется **навешивание** квантора на переменную x .

Переменная при этом называется **связанной** и вместо нее подставлять значения уже нельзя.

Несвязанная переменная называется **свободной**.

Если квантор навешивается на формулу с несколькими переменными, то он уменьшает число несвязанных переменных в этой формуле.

Пример. $P(x): \langle y < x \rangle$ - двухместный предикат определенный на множестве $N^2 = N \times N$.

Применим к нему квантор общности по переменной x .

$(\forall x)(y < x)$ - одноместный предикат, зависящий от переменной y .

Этот предикат может превратиться как в истинное высказывание (при $y = 1$), так и в ложное (при подстановке вместо y любых натуральных чисел, кроме 1).

Навешивание кванторов на двухместный предикат

При «навешивании» кванторов на двухместную высказывательную форму $Q(x, y)$ можно получить одну из восьми комбинаций:

- 1) $\forall x \forall y (Q(x, y))$ — «для любого x и любого y $Q(x, y)$ »;
- 2) $\forall y \forall x (Q(x, y))$ — «для любого y и любого x $Q(x, y)$ »;
- 3) $\exists x \exists y (Q(x, y))$ — «существует x и существует y , такие, что $Q(x, y)$ »;
- 4) $\exists y \exists x (Q(x, y))$ — «существует y и существует x , такие, что $Q(x, y)$ »;
- 5) $\exists x \forall y (Q(x, y))$ — «существует x , такой, что для любого y $Q(x, y)$ »;
- 6) $\forall x \exists y (Q(x, y))$ — «для всякого x существует y , такой, что $Q(x, y)$ »;
- 7) $\exists y \forall x (Q(x, y))$ — «существует y , такой, что для любого x $Q(x, y)$ »;
- 8) $\forall y \exists x (Q(x, y))$ — «для всякого y существует x , такой, что $Q(x, y)$ ».

Одноименные кванторы можно менять местами, что не влияет на истинность высказывания.

Например: $(\exists y) (\exists x) (x + y = 5)$. Это утверждение имеет тот же смысл, что и $(\exists x) (\exists y) (x + y = 5)$.

Для разноименных кванторов изменение порядка может привести к изменению истинности высказывания.

Например: $(\forall x) (\exists y) x < y$, т.е. для всякого числа x существует большее число y – истинное высказывание.

Поменяем местами кванторы: $(\exists x) (\forall y) x < y$ – существует число x большее любого числа y – ложное высказывание.

Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Для доказательства истинности утверждения $(\forall x) P(x)$ с квантором общности, определенного на множестве M , необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений $x \in M$ в предикат $P(x)$ последний обращается в истинное высказывание. Если множество M конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество M бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Высказывание $(\forall x) P(x)$ ложно, если можно указать такое значение $a \in M$, при котором $P(x)$ обращается в ложное высказывание $P(a)$. Поэтому, для опровержения высказывания с квантором общности достаточно привести пример.

Как устанавливается значение истинности высказывания с квантором?

Высказывание $\exists x P(x)$ истинно, если можно указать такое значение $a \in M$ при котором $P(x)$ обращается в истинное высказывание $P(a)$. Поэтому, чтобы убедиться в истинности высказывания с квантором существования, достаточно привести пример.

Для доказательства ложности утверждения $(\exists x) P(x)$ с квантором существования, определенного на множестве M , необходимо убедиться в том, что при подстановке каждого из значений $x \in M$ в предикат $P(x)$ последний обращается в ложное высказывание. Если множество M конечно, то это можно сделать путем перебора всех случаев; если же множество M бесконечно, то необходимо провести рассуждения в общем виде.

Упражнения

Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел:

- а) $(\forall x) (\exists y) (x + y = 7)$;
- б) $(\exists y) (\forall x) (x + y = 7)$;
- в) $(\exists x) (\forall y) (x + y = 7)$;
- г) $(\forall x) (\forall y) (x + y = 7)$;
- д) $[(\forall x) (\forall y) (x + y = 3)] \rightarrow (3 = 4)$;
- е) $(\forall x) [(x^2 > x) \leftrightarrow ((x > 1) \vee (x < 0))]$;
- ж) $(\forall a) \{[(\exists x) (ax = 6)] \leftrightarrow (a \neq 0)\}$;
- з) $(\forall b) (\exists a) (\forall x) \{x^2 + ax + b > 0\}$;
- и) $(\forall x) [((x > 1) \vee (x < 2)) \leftrightarrow (x = x)]$;
- к) $(\exists b) (\forall a) (\exists x) (x^2 + ax + b = 0)$;
- л) $(\exists a) (\forall b) (\exists x) (x^2 + ax + b = 0)$.

Упражнения

Выяснить, какие из следующих предложений являются высказываниями, а какие предикатами:

а) найдется такое x , что $x + y = 2$;

б) для любых x и y имеет место равенство $x + y = y + x$.

На языке логики предикатов записать определение убывающей функции

Функция $f(x)$ называется убывающей а множестве M , если для любых чисел x_1 и x_2 , принадлежащих множеству M , из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$

$$(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 < x_2) : f(x_1) < f(x_2).$$

Домашнее задание

1. Записать словами формулу

$$\exists x \forall y (A(x) \& B(y) \rightarrow C(x, y))$$

где, $A(x)$ = “ x – студент”; $B(y)$ = “ y – экзамен”,

$C(x, y)$ = ” x сдал экзамен y ”.

2. Записать предикатной формулой высказывание: «Все кошки знают русский язык»

Упражнения

Найти формулу соответствующую предложению. “По меньшей мере один объект обладает свойством P”.

Ответы:

а) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$

б) $\exists x (P(x))$

в) $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$

г) $(\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$

Найти формулу соответствующую предложению. “Существуют несовпадающие объекты, обладающие свойством P”.

Ответы:

а) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$

б) $\exists x (P(x))$

в) $\exists x \exists y (P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y)$

г) $(\exists x P(x)) \wedge (\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y))$

Формулы логики предикатов. Равносильность формул

Определение. *Формула логики предикатов* определяется индуктивно следующим образом:

1. Любая формула логики высказываний есть формула логики предикатов.

2. Предметные переменные x, y, z, \dots есть формулы.

3. Предикаты $P(x), Q(x, y), \dots$, а также выражения с кванторами $\forall xP(x), \exists xR(x), \forall x\exists yQ(x, y), \dots$ есть формулы.

4. Если A и B – формулы, то $\neg A, A \vee B, A \& B, A \rightarrow B, A \sim B$ есть формулы, в которых свободные переменные формул A и B остаются свободными, а связанные переменные формул A и B остаются связанными.

5. Ничто, кроме указанного в пунктах 1 – 4, не есть формула.

Являются ли формулами следующие выражения

а) $A \& B \rightarrow C$, где A, B, C – высказывания.

б) $\forall x \exists y Q(x, y, z) \& \forall x \exists y P(x, y, u)$.

в) $\forall x \exists y P(x, y, z) \Rightarrow Q(x, y, z)$

Равносильные формулы

Определение. Формулы F и G , определенные на некотором множестве M , называются **равносильными на этом множестве**, если при **любых** подстановках констант вместо переменных они принимают одинаковые значения.

Определение. Формулы, равносильные на **любых** множествах, будем называть просто **равносильными**.

Являются ли равносильными предикаты:

а) $P(x): (3x+8)/(x^2+1)=0$ и $Q(z): -6z-16=0$

б) $P(x): (x+2)(x-3)=0$ и $Q(x): (x-3)=0$

На множестве действительных чисел?

Следствия и равносильности логики предикатов

Переход от одних формул к равносильным им другим формулам логики предикатов может быть произведен по следующим правилам:

1. Все равносильности, имеющие место для логики высказываний, переносятся на логику предикатов.

2. Перенос квантора через отрицание.

Пусть A – формула, содержащая свободную переменную x . Тогда

$$\overline{(\forall x A(x))} \equiv \exists x (\overline{A(x)}).$$

$$\overline{(\exists x A(x))} \equiv \forall x (\overline{A(x)}).$$

3. Вынос квантора за скобки.

Пусть формула $A(x)$ содержит переменную x , а формула B не содержит переменной x , и все переменные, связанные в одной формуле, связаны в другой. Тогда

$$\forall x A(x) \vee B \equiv \forall x (A(x) \vee B).$$

$$\forall x A(x) \& B \equiv \forall x (A(x) \& B).$$

$$\exists x A(x) \vee B \equiv \exists x (A(x) \vee B).$$

$$\exists x A(x) \& B \equiv \exists x (A(x) \& B).$$

4. Дистрибутивность квантора общности относительно конъюнкции и квантора существования относительно дизъюнкции.

Пусть формула B , так же, как и формула A , зависит от x . Тогда

$$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \& B(x)).$$

$$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \equiv \exists x (A(x) \vee B(x)).$$

5. Перестановка одноименных кванторов.

$$\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y).$$

$$\exists x \exists y A(x, y) \equiv \exists y \exists x A(x, y).$$

Разноименные кванторы переставлять, вообще говоря, нельзя!

Следствия и равносильности логики предикатов

Равносильности для \exists	Правила	Равносильности для \forall
$\exists x \exists y Q(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x Q(x, y)$	Правила перестановки кванторов	$\forall x \forall y Q(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(x, y)$
$\exists x \forall y Q(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$		
$\bar{\exists} x F(x) \Leftrightarrow \forall x \bar{F}(x)$	Перенос отрицания с квантора на предикат	$\bar{\forall} x F(x) \Leftrightarrow \exists x \bar{F}(x)$
$\bar{\forall} x \bar{F}(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$		$\bar{\exists} x \bar{F}(x) \Leftrightarrow \forall x F(x)$
$\exists x (F(x) \vee \Phi(x)) \Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \Phi(x)$	Правила дистрибутивности кванторов	$\forall x (F(x) \wedge \Phi(x)) \Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \Phi(x)$
$\exists x (F(x) \wedge \Phi(x)) \Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x \Phi(x)$		$\forall x (F(x) \vee \Phi(x)) \Rightarrow \forall x F(x) \vee \forall x \Phi(x)$
$\exists x (M \wedge F(x)) \Rightarrow M \wedge \exists x F(x)$		$\forall x (M \wedge F(x)) \Rightarrow M \wedge \forall x F(x)$
$\exists x (M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \exists x F(x)$		$\forall x (M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \forall x F(x)$

Выражение суждения в виде формулы логики предикатов

Существуют две задачи, определяющие связь между суждениями и формулами логики предикатов:

- 1) выражение суждения в виде формулы логики предикатов;
- 2) интерпретация формулы логики предикатов.

Суждение – это мысль, в которой утверждается наличие или отсутствие свойств предметов, отношений между предметами.

Простым суждением назовем суждение, в котором нельзя выделить часть, в свою очередь являющуюся суждением.

Среди простых суждений выделяют *атрибутивные суждения* и *суждения об отношениях*.

Атрибутивные суждения

Все атрибутивные суждения можно разделить на следующие типы:

Типы атрибутивных суждений	На языке логики предикатов
" a есть P "	$P(a)$
"Все S есть P "	$\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$
"Ни один S не есть P "	$\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$
"Некоторые S есть P "	$\exists x(S(x) \& P(x))$
"Некоторые S не есть P "	$\exists x(S(x) \& \neg P(x))$

Если кванторная переменная связана квантором общности (\forall), то в формуле используется знак **импликации** (\Rightarrow), а если кванторная переменная связана квантором существования (\exists), то в формуле используется знак **конъюнкции** ($\&$).

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

а) **Линда – собака.**

Заменим имя "Веста" символом "в" и введем предикат $P(x)$ = "x – собака".

Наше суждение можно выразить формулой: $P(в)$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

б) Всякая логическая функция может быть задана таблицей.

Введем предикаты:

$S(x)$ = "x – логическая функция";

$P(x)$ = "x может быть задана таблицей".

Искомая формула: $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

в) Ни один народ не хочет войны.

Введем предикаты:

$S(x)$ = "x – народ";

$P(x)$ = "x хочет войны".

Суждение можно выразить формулой: $\forall x(S(x) \Rightarrow \neg P(x))$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

г) **Некоторые журналисты были в космосе.**

Введем предикаты:

$S(x)$ = "x – журналист";

$P(x)$ = "x был в космосе".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \& P(x))$.

Примеры

Перевести на язык логики предикатов следующие суждения:

д) **Некоторые современники динозавров не вымерли.**

Введем предикаты:

$S(x)$ = "x – современник динозавров";

$P(x)$ = "x вымер".

Наше суждение можно выразить формулой: $\exists x(S(x) \ \& \ \neg P(x))$.