

Тема 4.1. Основы теории графов

1 Понятие графа

Графы являются существенным элементом математических моделей в самых разнообразных областях науки и практики. Они помогают наглядно представить взаимоотношения между объектами или событиями в сложных системах.

Определение. Система, состоящая из непустого множества V и бинарного отношения E , определенного на V , называется **графом**. Эту систему будем обозначать через $G=(V,E)$. Элементы множества V называются *вершинами графа* $G=(V,E)$, а элементы отношения E — его *ребрами*.

Вершины и ребра графа называются его *элементами*. Граф, содержащий конечное число элементов, называется *конечным*. Число вершин конечного графа G называется его *порядком*. Граф порядка n , имеющий m ребер, называется (n, m) -графом.

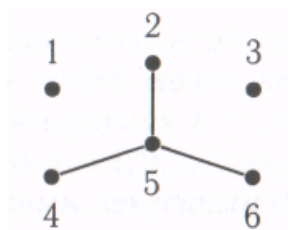


Рисунок 1 - Пример графа

Пример. На рисунке 1 изображен граф порядка 6 с тремя ребрами, т.е. $(6,3)$ -граф. Он образован множеством $\{1,2,3,4,5,6\}$ вершин и множеством ребер $\{(4,5), (2,5), (5,6)\}$.

Если пара (u,v) является ребром графа, то вершины u и v называются *концами этого ребра*, а про ребро говорят, что оно *соединяет вершины u и v* .

Ребро с совпадающими концами называется *петлей*.

2 Виды графов

Граф без петель называется *простым*.

Псевдографом называется система, состоящая из непустого множества V , элементы которого называются вершинами, и совокупности E пар вершин, называемых ребрами. Совокупность E может содержать одинаковые пары, а также пары с одинаковыми элементами, принадлежащими V .

Таким образом, в псевдографе две вершины могут соединяться несколькими ребрами и, кроме того, могут встречаться петли (рисунок 2).

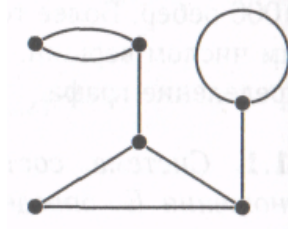


Рисунок 2 - Псевдограф

Псевдограф без петель называется *мультиграфом* (или графом с кратными ребрами) (рисунок 3).

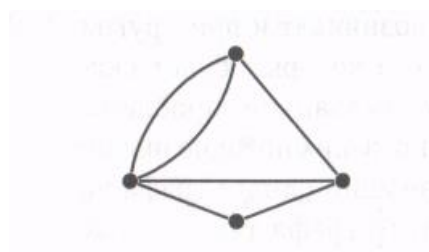


Рисунок 3 - Мультиграф

То есть, в мультиграфе нет петель, а некоторые вершины могут быть соединены несколькими ребрами.

Граф $G=(V,E)$ называется *ориентированным*, или *орграфом*, если принадлежащие множеству E пары вершин являются упорядоченными. Ориентированные ребра называются *дугами*. Ориентированность пары вершин, образующих дугу, означает, что одна из них считается началом, а другая — концом дуги. На рисунках направления от начала к концу дуг орграфа указываются стрелками (рисунок 4).

Иногда рассматриваются и смешанные графы, имеющие как дуги, так и неориентированные ребра. В таких графах неориентированное ребро (a, b) заменяет две дуги (a, b) и (b, a) . Обычно направление дуги указывает, в какую сторону по ней возможно двигаться. Так как ребро не имеет ориентации, двигаться по нему можно в обе стороны (рисунок 5).

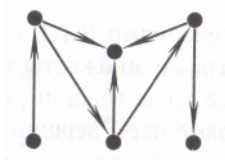


Рисунок 4 – Ориентированный граф

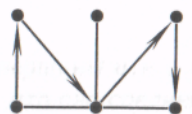


Рисунок 5 – Смешанный граф

Граф называется *полным*, если любые две его вершины соединены ребром. Граф, в котором нет ребер, называется *пустым*.

3 Матрица смежности, инцидентности

Две вершины графа называются *смежными*, если они являются концами какого-нибудь ребра этого графа. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общий конец. Вершина v и ребро r называются *инцидентными*, если v является концом ребра r , в противном случае они называются неинцидентными.

Пример. Рассмотрим граф, изображенный на рисунке 6. Его вершины 1 и 6 смежные, так как являются концами ребра (1,6). Вершины 2 и 5 не являются смежными. Вершина 4 и ребро (4,6) инцидентны, вершина 4 и ребро (5,6) неинцидентны. Ребра (6,5) и (5,1) смежны, ребра (6,4) и (1,2) несмежны.

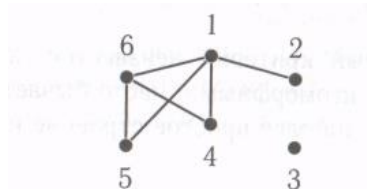


Рисунок 6 – Пример графа

Число ребер графа, инцидентных некоторой вершине, называется *степенью* этой вершины. Вершина графа, имеющая степень 0, называется *изолированной*, а вершина, имеющая степень 1, — *концевой*, или *висячей*.

Пример. В графе на рисунке 11 вершины 4 и 5 имеют степень 2, вершина 6 — степень 3, вершина 1 — степень 4. Вершина 2 является висячей, так как имеет степень 1. Вершина 3 изолированная.

Очевидно, в пустом графе все вершины изолированные, а в полном — степень каждой вершины на единицу меньше порядка графа.

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер.

Чтобы задать граф, надо каким-то способом описать множество V его вершин, множество E его ребер, а также указать, какие вершины и ребра являются инцидентными, то есть задать отношение инцидентности. Весьма простым и наглядным является задание графа при помощи рисунка, однако этот метод годится только для простейших случаев. Можно однозначно задать любой конечный граф, если воспользоваться следующими определениями.

Если задана функция, отображающая множество вершин или множество ребер графа в некоторое множество, элементы которого называются метками, то граф называется *помеченным* (или *нагруженным*, *взвешенным*).

Матрицей смежности графа $G=(V, E)$ называется матрица $A_G=(a_{ij})$ порядка n , определенная следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & (v_i, v_j) \in E \\ 0, & (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

В матрице смежности псевдографа число, находящееся на пересечении i -й строки и j -го столбца совпадает с числом ребер, соединяющих вершины v_i и v_j , при этом каждая петля считается двумя ребрами.

Число на пересечении i -й строки и j -го столбца матрицы смежности ориентированного псевдографа равно числу дуг, исходящих из вершины i и оканчивающихся в вершине j .

Матрицей инцидентности графа $G=(V, E)$ называется матрица $B_G=(b_{ij})$ порядка $n \times m$, определенная следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ инцидентна ребру } e_j, \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна ребру } e_j \end{cases}$$

Элементы матрицы инцидентности ориентированного графа D определяются следующим образом:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если дуга вершина } v_i - \text{конец дуги } e_j, \\ -1, & \text{если дуга вершина } v_i - \text{начало дуги } e_j \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } e_j \end{cases}$$

4 Изоморфизм графов

Графы $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ называются изоморфными, если существует такая функция φ , взаимно однозначно отображающая множество вершин V_1 на множество вершин V_2 , что пара (u,v) является ребром графа G_1 тогда и только тогда, когда пара $(\varphi(u), \varphi(v))$ является ребром графа G_2 .

На рисунке 7 изображены изоморфные графы.

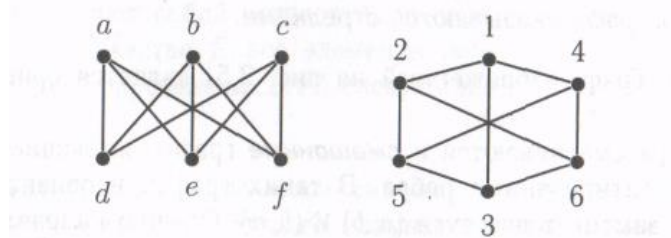


Рисунок 7 – Изоморфные графы

Пути и связность в неориентированных графах

1 Основные определения

Последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3\dots x_kv_{k+1}$, (где $k \geq 1$, $v_i \in V$, $i=1,\dots,k+1$, $x_i \in X$, $j=1,\dots,k$), в которой чередуются вершины и ребра и для каждого $j=1,\dots,k$ ребро x_j имеет вид $\{v_j, v_{j+1}\}$, называется *маршрутом*, соединяющим вершины v_1 и v_{k+1} . Вершина v_1 называется началом маршрута, вершина v_{k+1} — его концом.

Число ребер в маршруте P называется его *длиной* и обозначается $l(P)$. Маршрут называется *циклическим*, или просто *циклом*, если $v_1 = v_{k+1}$. Цикл называется *простым*, если любая вершина графа встречается в ней не более чем один раз.

Маршрут называется *цепью*, если каждое ребро встречается в нем не более одного раза, и *простой цепью*, если любая вершина графа встречается в ней не более чем один раз. Простая цепь — это цепь, которая не пересекает сама себя.

Вершины v_i и v_j называются *связанными*, если существует маршрут с началом в v_i и концом в v_j . В этом случае говорят также, что вершина v_j *достижима* из вершины v_i .

Связанность — это бинарное отношение на множестве вершин. Отношение связанности является отношением эквивалентности на

множестве вершин графа G и разбивает это множество на непересекающиеся подмножества — классы эквивалентности. Все вершины одного класса связаны между собой, вершины из разных классов между собой не связаны. Подграф, образованный всеми вершинами одного класса, называется *компонентой связности* графа G .

Неориентированный граф называется *связным*, если все его вершины связаны между собой. Максимальный связный подграф графа G называется *компонентой связности* графа G . Связный граф состоит из одной компоненты связности.

Граф на рисунке 8 состоит из двух компонент связности.



Рисунок 8 – Граф, состоящий из двух компонент связности

Матрица связности графа G – квадратная матрица $S(G)=[s_{ij}]$ порядка n , элементы которой равны

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists \text{ маршрут, соединяющий } v_j \text{ и } v_i, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$S(G) = \text{sgn}[E + A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1}]$ (E – единичная матрица порядка n),
где A^k – k -я степень матрицы смежности графа;

$$\text{sgn } x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Теорема. Если две вершины связаны между собой, то существует связывающая их простая цепь.

Пример. На рисунке 9 показаны примеры цикла, цепи и простой цепи.

Вершина графа называется *точкой сочленения*, если ее удаление увеличивает число связных компонент графа. Граф называется *разделимым*, если он содержит хотя бы одну точку сочленения, и *неразделимым*, если он не содержит таких точек.

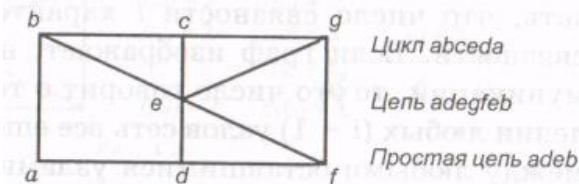


Рисунок 9 – Примеры цикла, цепи, простой цепи

2 Обходы в графе

Цикл в неориентированном графе называется *эйлеровым обходом* или *эйлеровым циклом*, если он содержит все ребра графа по одному разу. Граф называется *эйлеровым*, если в нем существует эйлеров цикл.

Теорема 1. Неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и все степени его вершин четны.

Теорема 2. Неориентированный граф является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связан и является объединением нескольких циклов, не пересекающихся по ребрам.

Теорема 3. Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно 2 вершины нечетной степени.

Цикл в неориентированном графе называется *гамильтоновым обходом* или *гамильтоновым циклом*, если он содержит все вершины графа в точности по одному разу. Граф называется *гамильтоновым*, если в нем существует гамильтонов цикл.

Задача нахождения гамильтонова цикла, поставленная английским математиком Гамильтоном, при всем сходстве ее формулировки с задачей об эйлеровом цикле оказывается гораздо более сложной. В то же время интерес к ее решению велик, поскольку она имеет естественную прикладную интерпретацию. Если рассматривать граф как транспортную сеть, вершины которой – города, а ребра — пути между городами, то задача о гамильтоновом цикле оказывается частным случаем известной «задачи о коммивояжере»: объехать все города, побывав в каждом ровно один раз и вернуться в исходный город. Более сложная постановка этой задачи связана со случаем, когда разные пути имеют разную цену в стоимости или длительности; тогда требуется найти обход всех городов с минимальной ценой.

Условие Дирака. Если граф G имеет $n \geq 3$ вершин и степень каждой вершины не меньше числа $n/2$, то этот граф гамильтонов.

В гамильтоновом графе нет точек сочленения.

Пути и связность в ориентированных графах

1 Виды связности

Последовательность $v_1x_1v_2x_2v_3\dots x_kv_{k+1}$, (где $k \geq 1$, $v_i \in V$, $i=1, \dots, k+1$, $x_i \in X$, $j=1, \dots, k$), в которой чередуются вершины и дуги и для каждого $j=1, \dots, k$ дуга x_j имеет вид (v_j, v_{j+1}) , называется *путем* из v_1 в v_{k+1} .

Цепь – незамкнутый путь, в котором все дуги попарно различны.

Контур – замкнутый путь.

Простой путь – путь (контур), в котором ни одна дуга не встречается дважды.

Простой контур – контур, в котором все вершины попарно различны.

Гамильтонов путь (контур) – простой путь (контур), проходящий через все вершины.

Эйлеров путь (контур) – путь (контур), содержащий все дуги графа по одному разу.

Длина пути – число дуг в пути.

Говорят, что *вершина w ориентированного графа D достижима из вершины v* , если либо $w=v$, либо существует путь из v в w .

Полупуть в ориентированном графе — это последовательность дуг, такая, что любые две соседних дуги различны и имеют общую инцидентную им вершину.

Иначе говоря, полупуть — это путь, который проходится без учета ориентации ребер.

Ориентированный граф называется *сильно связным*, если любые две вершины достижимы друг из друга.

Орграф называется *односторонне связным*, если для любой пары вершин существует путь между ними хотя бы в одну сторону.

Орграф называется *слабо связным*, если между любой парой вершин существует полупуть.

Орграф называется *несвязным*, если между некоторой парой вершин нет полупути.

Компонентой сильной связности ориентированного графа D называется его сильно связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого сильно связного подграфа ориентированного графа D .

Расстояния в графах

1 Основные определения

Расстоянием между вершинами $d(v, w)$ называется минимальная длина пути между ними, при этом $d(v, v) = 0$, $d(v, w) = \infty$, если не $\exists$ пути.

Расстояния в графе удовлетворяют аксиомам метрики

- 1) $d(v, w) \geq 0$, $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$
- 2) $d(v, w) = d(w, v)$ (в неориентированном графе)
- 3) $d(v, w) \leq d(v, w_1) + d(w_1, v)$
- 4) $d(v, w) < \infty$ в связном неориентированном графе.

Пусть $G = (V, X)$ связный граф (или псевдограф).

Диаметром графа G называется величина $d(G) = \max_{v, w \in V} d(v, w)$.

Пусть $v \in V$.

Максимальным удалением (эксцентриситетом) в графе G от вершины v называется величина $r(v) = \max_{w \in V} d(v, w)$.

Радиусом графа G называется величина $r(G) = \min_{v \in V} r(v)$

Центром графа G называется любая вершина $w \in V$ такая, что $r(w) = r(G)$.

Матрицей расстояний графа G с вершинами $v_1, \dots, v_n$ называется квадратная матрица порядка n , в которой для $i, j = \overline{1, n}$ элемент i -й строки и j -го столбца равен расстоянию между вершинами v_i и v_j .

В прикладных задачах обычно рассматриваются помеченные графы, в которых ребрам приписаны некоторые действительные числа. Длины маршрутов в таких графах определяются не числом пройденных ребер, а суммой весов этих ребер. Всю информацию о взвешенном графе можно получить из матрицы весов.

Матрица весов графа (длин дуг орграфа) G квадратная, ее порядок совпадает с порядком графа (орграфа). Элемент, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен весу ребра (дуги) (v_i, v_j) , если такое ребро (такая дуга) существует, в противном случае он равен ∞ .

Весом (или *длиной*) *маршрута* во взвешенном графе называется сумма весов ребер, входящих в этот маршрут. *Взвешенным расстоянием* между вершинами u и v называется наименьший из весов маршрутов, связывающих u и v . Маршрут от u до v , вес которого совпадает со взвешенным расстоянием между u и v , называется *кратчайшим* (минимальным).

Деревья

1 Основные свойства деревьев

Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом*. Связный подграф дерева называется *поддеревом*. Граф, у которого все связные компоненты являются деревьями, называется *лесом*.

Каждый из изображенных на рисунке 12 графов является деревом, а их объединение – лесом.

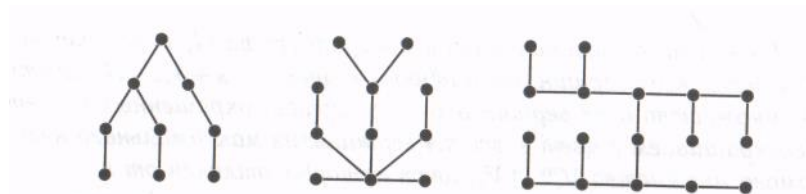


Рисунок 12 - Лес

Ориентированным деревом называется связный граф, не содержащий циклов, в котором только одна вершина, называемая *корнем*, не имеет входящих дуг, а все остальные вершины имеют по одной входящей дуге.

Свойства деревьев

1. В дереве любая цепь является простой.
2. Граф G_1 , полученный добавлением к дереву G новой вершины и ребра, связывающего эту вершину с одной из вершин графа G , является деревом.
3. Граф G является деревом тогда и только тогда, когда он не содержит циклов, но при добавлении любого ребра из него получается граф, содержащий ровно один простой цикл.
4. Если у дерева есть ребро, то у него есть висячая вершина.
5. Граф G является деревом тогда и только тогда, когда он связный и число его ребер на единицу меньше числа вершин.
6. В неориентированном дереве имеются по крайней мере две концевые вершины.

7. Между любыми двумя вершинами дерева имеется ровно один путь.
8. Дерево с n вершинами имеет $n-1$ ребро.

2 Нахождение центров дерева

Для неориентированных деревьев центры можно найти с помощью следующего алгоритма.

1. Обозначим исходное дерево G через $G^{(1)}$ и присвоим его концевым вершинам тип 1.
2. Если в полученном на предыдущем шаге графе $G^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots$) все вершины — концевые, алгоритм заканчивается. В остальных случаях переходим к шагу 3.
3. Удалим в $G^{(i)}$ все концевые вершины вместе с инцидентными им ребрами. Полученный граф обозначим через $G^{(i+1)}$. Этот граф является деревом, поскольку удаленные ребра не входят ни в какой путь, соединяющий оставшиеся вершины, и, следовательно, их удаление не нарушает связности $G^{(i+1)}$. Концевым вершинам $G^{(i+1)}$ присвоим тип $i + 1$. Полагаем $i = i + 1$ и переходим к шагу 2.

В результате работы алгоритма каждой вершине исходного дерева присваивается тип. На каждом шаге номер типа увеличивается на единицу, и вершины, оставшиеся к последнему шагу, получают максимальный тип k .

Теорема. Центрами дерева являются вершины максимального типа k . Дерево имеет либо один, либо два центра, причем в первом случае радиус дерева равен $k - 1$, а во втором — k .

3 Покрывающие деревья (остовы)

Цикломатическим числом неориентированного графа G называется величина $\gamma(G) = m - n + k$, где m - число ребер, n - число вершин, k — число связных компонент. Для дерева и леса $\gamma(G) = 0$, для других графов $\gamma(G) > 0$.

Остовом, или *покрывающим деревом*, связного графа $G=(V, E)$ называется часть G , которая содержит все его вершины и является деревом. *Хордой* остова графа G называется ребро G , не принадлежащее остову.

Очевидно, что любой связный граф имеет хотя бы один остов, а любой несвязный граф остова не имеет.

В последующем алгоритме части исходного графа G , которые возникают в процессе построения покрывающего дерева, будем называть *букетами*.

Алгоритм построения покрывающего дерева для произвольного невзвешенного графа G

1. Выбрать любое ребро G , не являющееся петлей. Пометить его меткой α и объявить букетом это ребро вместе с его концевыми вершинами.
2. Выбрать любое непомеченное ребро G , не являющееся петлей:
 - а) если один из концов выбранного ребра принадлежит построенному ранее букету B , а другой конец свободен (не принадлежит ни одному букету), пометить выбранное ребро меткой α , включить его вместе со свободным концом в букет B и перейти к шагу 3;

б) если оба конца выбранного ребра свободны, пометить его меткой α , объявить это ребро вместе с его концевыми вершинами новым букетом и перейти к шагу 3;

в) если концы выбранного ребра принадлежат разным построенным ранее букетам B и C , пометить выбранное ребро меткой α , включить его и букет C в букет B и перейти к шагу 3;

г) если оба конца выбранного ребра принадлежат одному букету, пометить его меткой β и перейти к шагу 3;

д) если непомеченных ребер нет, закончить алгоритм.

3. Если все вершины графа G вошли в один букет, закончить алгоритм. Если нет, перейти к шагу 2.

***Алгоритм выделения минимального остовного дерева в
неориентированном взвешенном графе G***

1) Выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему двумя вершинами оно образует подграф G_2 графа G . Положим $i:=2$.

2) Если $i=n(G)$, то задача решена и G_i – искомое минимальное остовное дерево графа G . Иначе переходим к шагу 3).

3) Строим граф G_{i+1} . Для этого добавим к графу G_i новое ребро минимальной длины из оставшихся, которое инцидентно какой-либо вершине графа G_i и одновременно вершине, не содержащейся в G_i . Вместе с этим ребром включаем в G_{i+1} и эту инцидентную ему вершину. Присваиваем $i:=i+1$ и переходим к шагу 2.